MTM5801 - H-Cálculo I - 2013/01
Prof. Gilles Gonçalves de Castro
Prova 1 (Admissão) - 19 de abril de 2012

Nome: ______________________________

Curso: ____________________ Matrícula: ____________________

**Leia com Atenção:**

- Contarão pontos a clareza das ideias e a precisão no raciocínio; evite escrever em excesso ou pouco demais.

1) (2,5 pontos) Prove as seguintes afirmações a respeito de conjuntos e funções:

   a) Se $A$ e $B$ são conjuntos tais que $A \cap B = A \cup B$ então $A = B$.
   b) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.
   c) Dadas duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$ e $Y \subseteq C$, mostre que $(g \circ f)^{-1}(Y) = f^{-1}(g^{-1}(Y))$.

2) (2,5 pontos) Prove as afirmações abaixo para números reais $a, b, c$, usando as propriedades (P1)-(P12), definições e proposições vistas em sala, *indicando claramente a propriedade, proposição ou definição usada em cada passo.*

   a) Se $a + c = b + c$ então $a = b$,
   b) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$,
   c) Se $a < b$ e $c < 0$ então $ac > bc$.

3) (2,5 pontos) Mostre as seguintes relações para números reais $a, b$ (você pode fazer essa questão de forma mais direta sem demonstrar cada passo como na questão 2):

   a) Para $a, b \geq 0$, $a < b$ se e somente se $a^2 < b^2$.
   b)
   $$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0.$$

4) (2,5 pontos) Para $n \in \mathbb{N}$, definimos $n!$ recursivamente por $0! = 1$ e $n! = n(n-1)!$ se $n > 0$. Além disso, dados $n, k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$ definimos o coeficiente binomial $n, k$ por
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

   (a) Mostre que
   $$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$
   (b) Use indução para mostrar o teorema binomial:
   $$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$
   para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

"*Problems worthy of attack prove their worth by hitting back.*"

Piet Hein